Colegio Nuestra Señora de Loreto

TRIGONOMETRÍA

4º E.S.O.

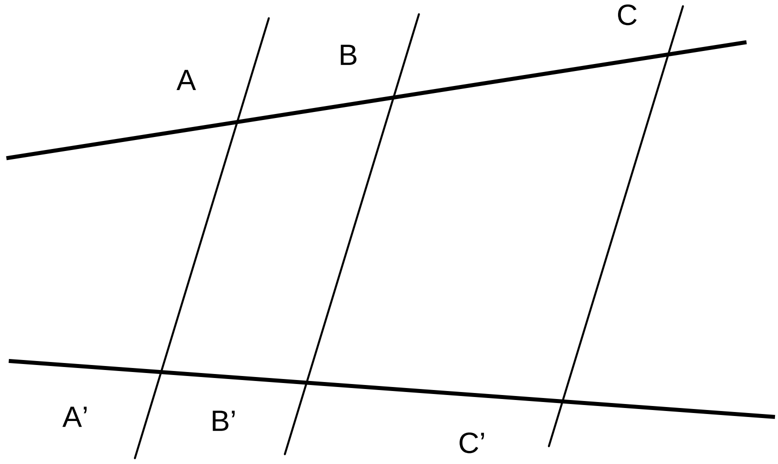
Francisco Suárez Balbuena

TRIGONOMETRÍA

PREVIOS

1. Teorema de Thales (Semejanza)

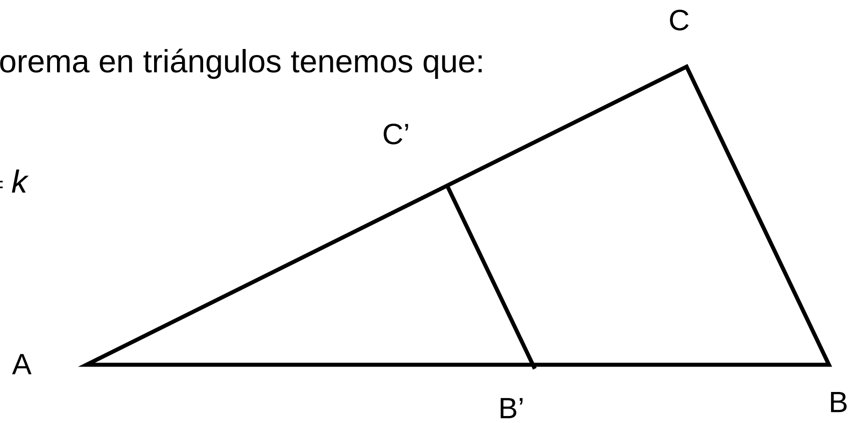
Si cortamos dos rectas por una serie de rectas paralelas, los segmentos determinados en una de ellas son proporcionales a los segmentos correspondientes determinados en la otra.
Es decir:



$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{AC}{A'C'}$$

Por lo tanto, usando este teorema en triángulos tenemos que:

$$\frac{AB}{AB'}=\frac{AC}{AC'}=\frac{BC}{B'C'}=k$$



2. Área de Triángulos

a) $A_T=\dfrac{base \bullet altura}{2}$

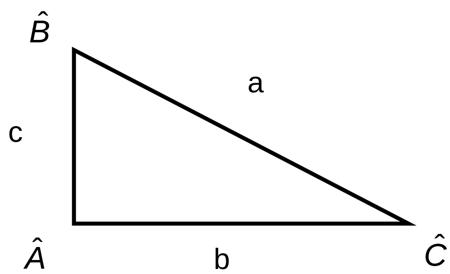
b) sp=semiperímetro

Fórmula de Herón: $A_T=\sqrt{sp\bullet(sp-a)(sp-b)(sp-c)}$

3.Triángulos rectángulos

$$\left.\begin{array}{l}\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180^{o}\\ \hat{A}=90^{o}\end{array}\right\}\hat{B}+\hat{C}=90^{o}$$

$$\begin{cases}\text{a se llama hipotenusa}\\ \text{b,c se llaman catetos}\end{cases}$$



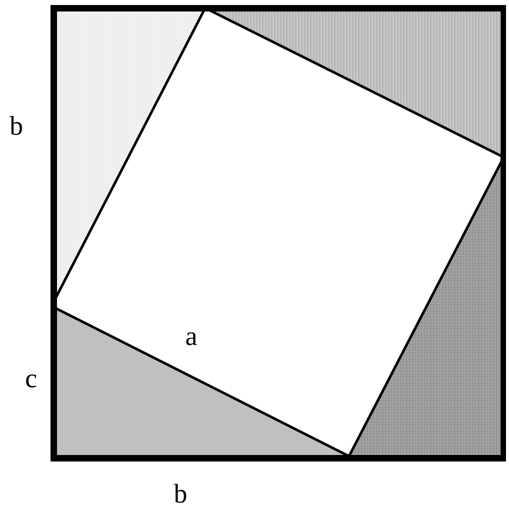
4. Teorema de Pitágoras

Dado un triángulo rectángulo como el de la figura anterior , se verifica que:

$$\mathbf{a^2 = b^2 + c^2}$$

Demostración

Veremos una demostración geométrica de este teorema. Para ello podemos observar la figura siguiente:



Se tiene que el área total de la figura es

$$(b+c)^2 = b^2 + c^2 + 2bc$$

Además el área del cuadrado interior de lado a es

$$A_C = a^2$$

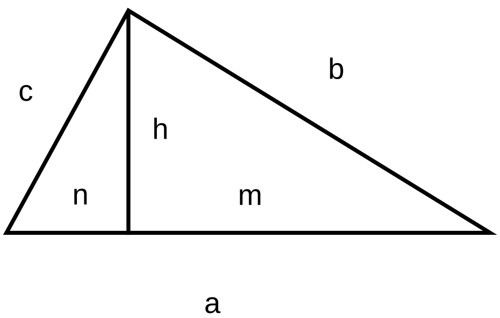
Y la de los cuatro triángulos que se forman es

$$4 \cdot A_T = 4 \cdot \frac{base \cdot altura}{2} = 2 \cdot b \cdot c$$

Por tanto se verifica que

$$(b+c)^2 = a^2 + 2bc \Rightarrow b^2 + c^2 + \cancel{2}\cancel{bc} = a^2 + 2\cancel{bc} \Rightarrow b^2 + c^2 = a^2$$

5. Consecuencias:



Teorema de la altura: $h^2 = m \bullet n$

Teorema del cateto: $\begin{cases} b^2 = a \bullet m \\ c^2 = a \bullet n \end{cases}$

Demostración

Observando la figura anterior, podemos observar dos triángulos rectángulos, que al aplicar el teorema de Pitágoras en ambos obtenemos que:

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} b^2 = h^2 + m^2 \\ c^2 = h^2 + n^2 \end{array}\right\} \xrightarrow{sumando} b^2 + c^2 = m^2 + n^2 + 2h^2 \\ \qquad a^2 = b^2 + c^2 \\ a = m + n \to a^2 = (m+n)^2 = m^2 + n^2 + 2mn \end{array}\right\} \to \cancel{m}^2 + \cancel{n}^2 + 2mn = \cancel{m}^2 + \cancel{n}^2 + 2h^2 \to m \bullet n = h^2$$

y en el Teorema del cateto: $\begin{cases} b^2 = m^2 + h^2 = m^2 + m \cdot n = m \cdot (m+n) = m \cdot a \\ c^2 = n^2 + h^2 = n^2 + m \cdot n = n \cdot (n+m) = n \cdot a \end{cases}$

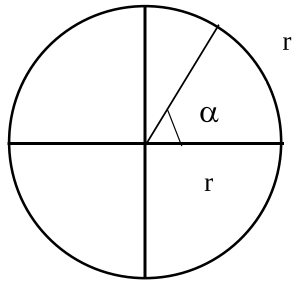
6. Medición de ángulos

La medición de ángulos puede realizarse en tres sistemas diferentes: sexagesimal, centesimal y en radianes:

a) Sistema Sexagesimal (DEG): Este sistema es el más conocido, y en él, un ángulo recto tiene 90°. Cada grado se divide en 60 minutos y cada minuto en 60 segundos.

b) Sistema Centesimal (GRAD): Escala de medida de ángulos, en la que el ángulo recto se divide en 100 partes iguales llamadas grados centesimales; y a su vez, el grado se divide en otras 100 partes llamadas minutos, y el minuto en otras 100, llamadas segundos.

c) Radian (RAD): Unidad de medida de ángulos que equivale a aquel que, con el vértice en el centro de una circunferencia, sostiene un arco de longitud igual al radio.



α = 1 radian (aprox. 57°17’44’’)
Longitud circunferencia = $2\pi r$
Luego la circunferencia recorre 2π radianes, por lo tanto:

360º ≡ 2π radianes

DEG	RAD	GRAD
360º	2π	400º
180º	π	200º
90º	$\pi/2$	100º

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

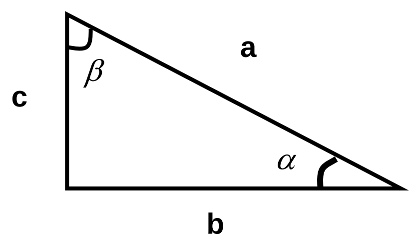
Definición

Se definen las razones trigonométricas seno, coseno, tangente, cosecante, secante y cotangente del ángulo α como sigue:

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{c}{a} \qquad \text{cosec}\,\alpha = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{a}{c}$$

$$\cos\alpha = \frac{\text{cateto contiguo}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{a} \qquad \sec\alpha = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto contiguo}} = \frac{a}{c}$$

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto contiguo}} = \frac{c}{b} \qquad \text{cotg}\,\alpha = \frac{\text{cateto contiguo}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{b}{c}$$



Propiedades

1. $\text{tg}\,\alpha = \dfrac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}$ $\longrightarrow$ Demostración: $\dfrac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{\frac{c}{a}}{\frac{b}{a}} = \dfrac{c}{a} \div \dfrac{b}{a} = \dfrac{c \cdot \cancel{a}}{\cancel{a} \cdot b} = \dfrac{c}{b} = \text{tg}\,\alpha$

2. $\text{cotg}\,\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\text{sen}\,\alpha}$

3. $\text{cosec}\,\alpha = \dfrac{1}{\text{sen}\,\alpha}$

4. $\text{cotg}\,\alpha = \dfrac{1}{\text{tg}\,\alpha}$

5. $\sec\alpha = \dfrac{1}{\cos\alpha}$

Además debemos tener en cuenta por la definición del seno y del coseno que ambos, al obtenerse como división de un cateto y la hipotenusa, y puesto que la hipotenusa de un triángulo rectángulo es siempre el lado mayor, se tendrá entonces que ambas razones trigonométricas deben ser menores que 1.

Teorema Fundamental de la Trigonometría

$$\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\,\alpha = 1$$

Demostración

$$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = \left(\frac{c}{a}\right)^2 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 = \frac{c^2}{a^2} + \frac{b^2}{a^2} = \frac{c^2 + b^2}{a^2} = \frac{a^2}{a^2} = 1$$

Por el teorema de Pitágoras

Consecuencias

1. Tenemos que $sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1$, entonces como tenemos dos cantidades positivas (al estar elevadas al cuadrado) que se suman y son iguales a 1, esto quiere decir que ambas cantidades deben ser menores o iguales a 1, es decir:

$$sen^2\alpha \le 1 \Rightarrow \quad |sen\,\alpha| \le 1 \Rightarrow \quad -1 \le sen\,\alpha \le 1$$

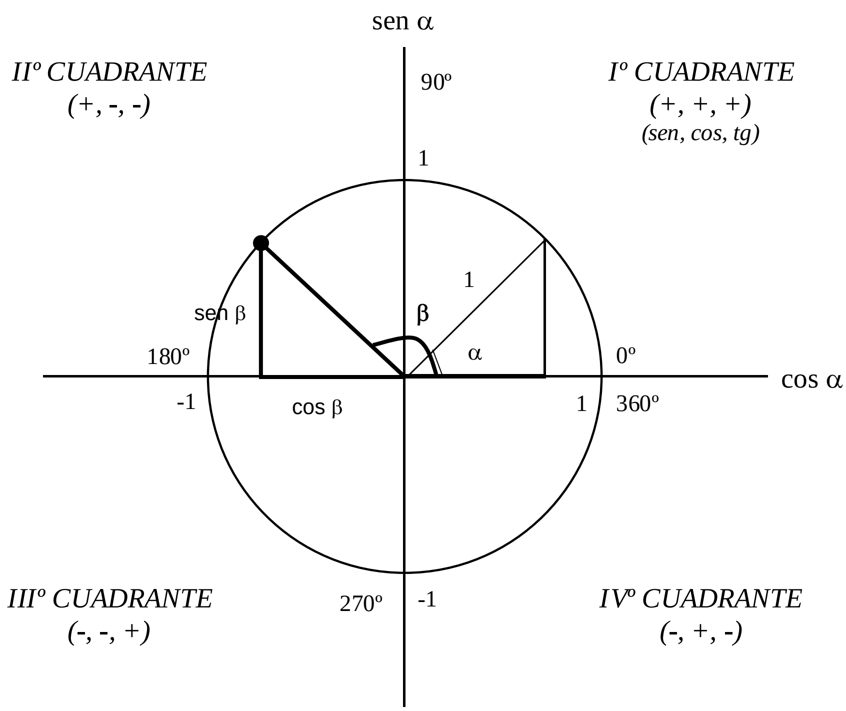
$$cos^2\alpha \le 1 \Rightarrow \quad |cos\,\alpha| \le 1 \Rightarrow \quad -1 \le cos\,\alpha \le 1$$

2. La ecuación de una circunferencia de centro (a,b) y radio r es $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$

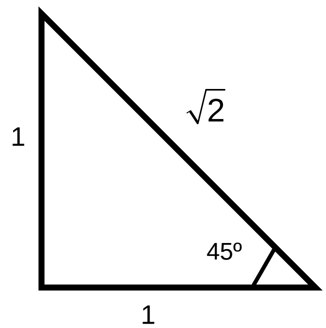
   Como tenemos que $sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1$, podemos tomar $\begin{cases} x = cos\,\alpha \\ y = sen\,\alpha \end{cases}$
   y entonces obtenemos la ecuación $x^2 + y^2 = 1$
   que es la ecuación de una circunferencia de centro el punto (0,0) y de radio 1. Luego todos los puntos de esta circunferencia son solución de dicha ecuación.

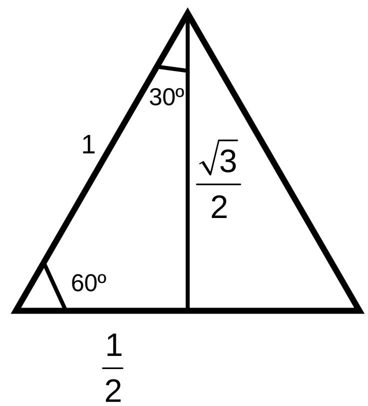
Importante

En la definición que hemos hecho de las funciones trigonométricas hemos estado muy restringidos, pues todos los ángulos que podemos utilizar son menores de 90º. A partir de la observación anterior podemos ampliar estas definiciones a ángulos mayores de 90º, de la siguiente forma:



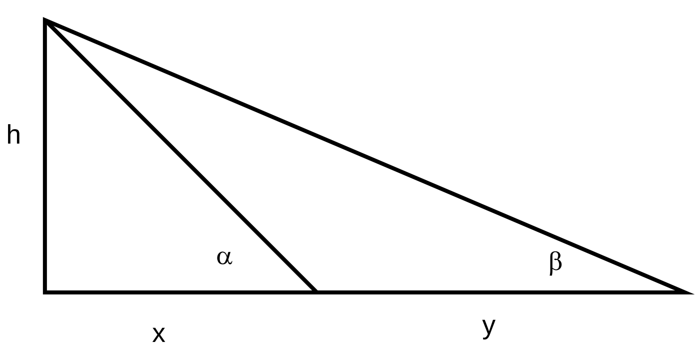
Razones Trigonométricas de algunos ángulos muy utilizados





α	**sen α**	**cos α**	**tg α**	**cosec α**	**sec α**	**cotg α**
45º	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	1
30º	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
60º	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
0º	0	1	0	∞	1	∞
90º	1	0	∞	1	∞	0
180º	0	-1	0	∞	-1	∞
270º	-1	0	∞	-1	∞	0

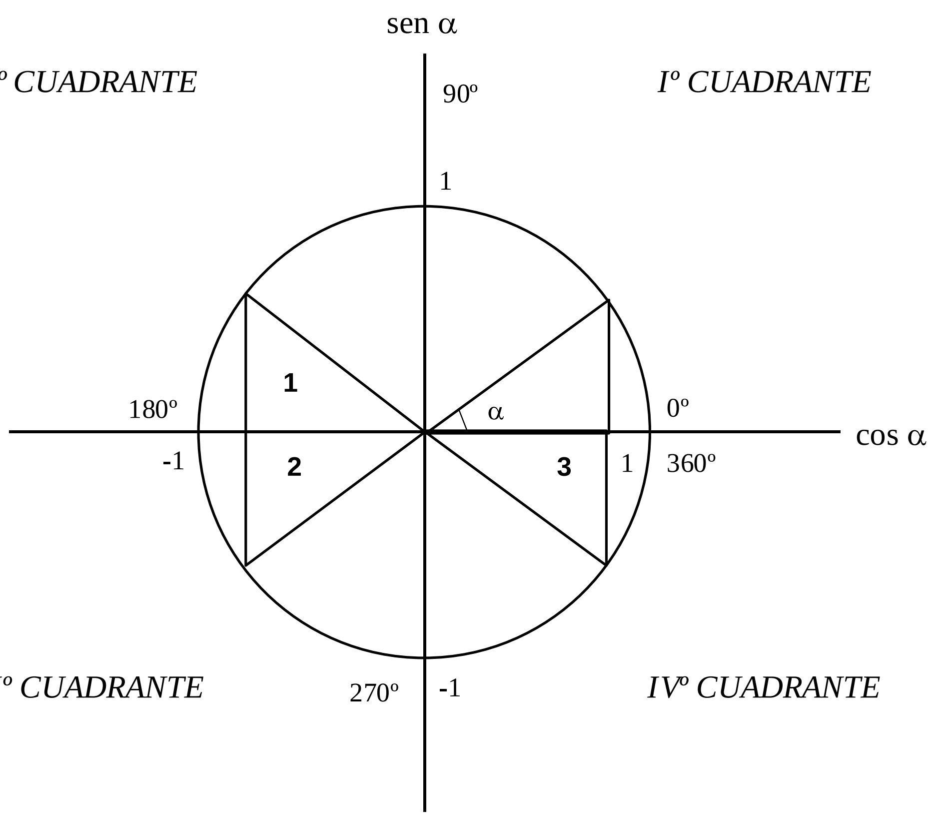
Problemas de Doble Observación



$$tg\alpha = \frac{h}{x}$$

$$tg\beta = \frac{h}{x+y}$$

Reducción de ángulos al primer cuadrante



1. Ángulos Suplementarios ($\alpha+\beta=180º$): $\beta = 180º - \alpha$

$$\text{sen } \beta = \text{sen } (180º - \alpha) = \text{sen } \alpha$$
$$\cos \beta = \cos (180º - \alpha) = -\cos \alpha$$

2. Ángulos que difieren en π : $\beta = 180º + \alpha$

$$\text{sen } (180º + \alpha) = -\text{sen } \alpha$$
$$\cos (180º + \alpha) = -\cos \alpha$$

3. Ángulos opuestos: $\beta = 360º - \alpha = -\alpha$

$$\text{sen } (-\alpha) = -\text{sen } \alpha$$
$$\cos (-\alpha) = \cos \alpha$$

4.- Ángulos Complementarios ($\alpha+\beta=90º$): $\beta = \pi/2 - \alpha$

$$\text{sen } \beta = \text{sen } (\pi/2 - \alpha) = \cos \alpha$$
$$\cos \beta = \cos (\pi/2 - \alpha) = \text{sen } \alpha$$

5.- Ángulos que difieren en $\pi/2$: $\beta = \pi/2 + \alpha$

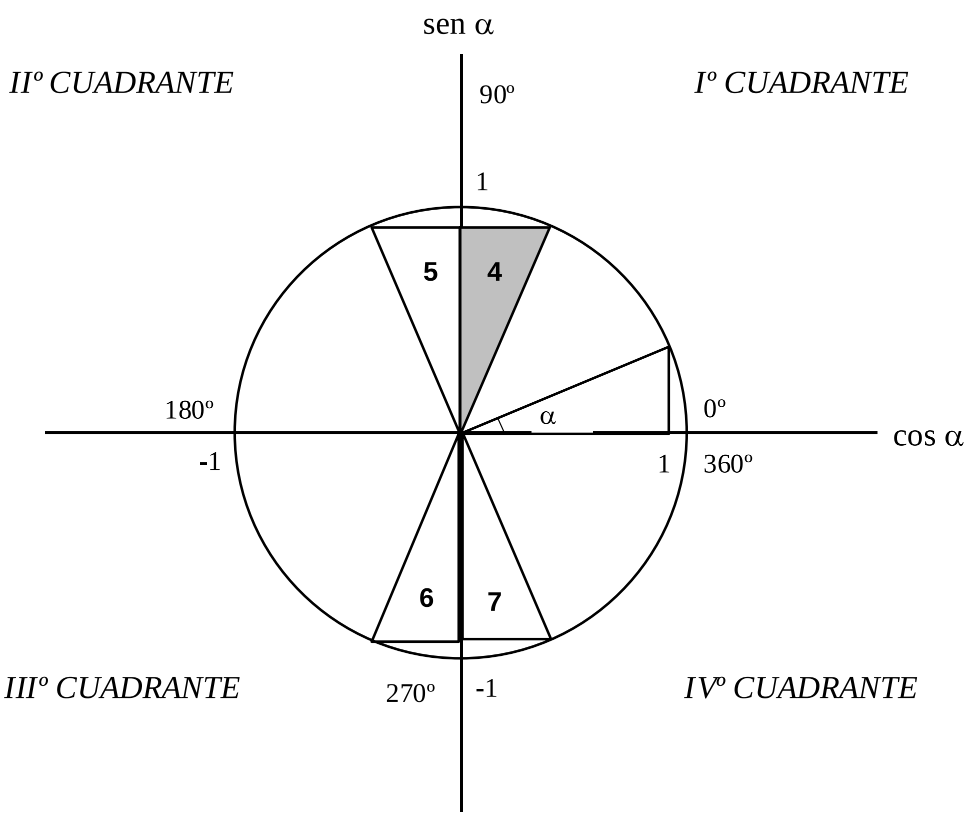
$$\text{sen}\ (\pi/2 + \alpha) = \cos \alpha$$
$$\cos\ (\pi/2 + \alpha) = -\ \text{sen}\ \alpha$$

6.- $\beta = 270º - \alpha = 3\pi/2 - \alpha$

$$\text{sen}\ (3\pi/2 - \alpha) = -\cos \alpha$$
$$\cos\ (3\pi/2 - \alpha) = -\text{sen}\ \alpha$$

7.- $\beta = 270º + \alpha = 3\pi/2 + \alpha$

$$\text{sen}\ (3\pi/2 + \alpha) = -\cos \alpha$$
$$\cos\ (3\pi/2 + \alpha) = \text{sen}\ \alpha$$

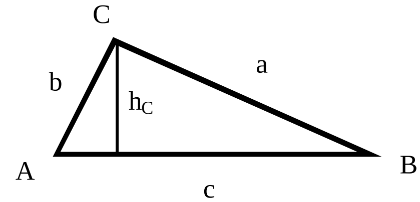


AMPLIACIÓN: Triángulos no rectángulos

Dado cualquier triángulo se verifican los siguientes resultados:

Teorema del seno

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C} = cte. = 2 \cdot R$$



donde R es el radio de la circunferencia circunscrita.

Demostración

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{sen} A = \dfrac{h_C}{b} \Rightarrow h_C = b \cdot \operatorname{sen} A \\ \operatorname{sen} B = \dfrac{h_C}{a} \Rightarrow h_C = a \cdot \operatorname{sen} B \end{array}\right\} b \cdot \operatorname{sen} A = a \cdot \operatorname{sen} B \Rightarrow \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{a}{\operatorname{sen} A} \qquad (I)$$

De forma análoga, tomando la altura h_A, se tiene que:

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{sen} C = \dfrac{h_A}{b} \Rightarrow h_A = b \cdot \operatorname{sen} C \\ \operatorname{sen} B = \dfrac{h_A}{c} \Rightarrow h_A = c \cdot \operatorname{sen} B \end{array}\right\} b \cdot \operatorname{sen} C = c \cdot \operatorname{sen} B \Rightarrow \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C} \qquad (II)$$

Luego con (I) y (II) se tiene lo que queremos.

Falta ver que es constante e igual a 2·R donde R es el radio de la circunferencia circunscrita.
Por medio del dibujo y por lo demostrado anteriormente podemos ver que:

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A'} = \frac{2 \cdot R}{\operatorname{sen} C'}$$

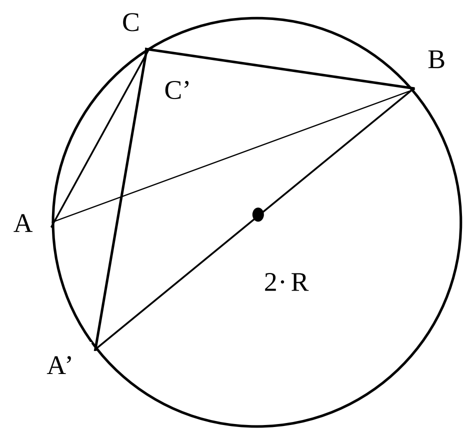
Pero en una circunferencia se verifica que C'=90º

Luego *sen* C' = 1

Además por semejanza de triángulos se tiene que A' = A.

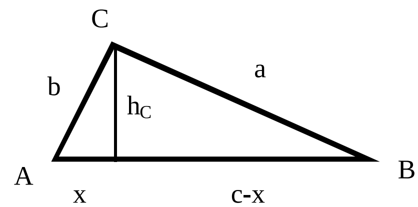
Por tanto se tiene que:

$$2 \cdot R = \frac{a}{\operatorname{sen} A}$$



Teorema del coseno

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$$



Demostración

Por el teorema de Pitágoras se tiene que:

$$\left.\begin{array}{l} a^2 = h_C^2 + (c-x)^2 \\ h_C^2 = b^2 - x^2 \\ x = b \cdot \cos A \end{array}\right\} a^2 = b^2 - \cancel{x}^2 + c^2 + \cancel{x}^2 - 2cx = b^2 + c^2 - 2cx = b^2 + c^2 - 2cb \cdot \cos A$$

Observación:

Análogamente pueden demostrarse las ecuaciones:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C$$