IES ATENEA. 1er CONTROL. MATEMÁTICAS B. 4º ESO. GRUPO: BC

Nombre: ____

Evaluación: ***Tercera***. *Fecha:* *30 de abril de 2010*

NOTA	

Ejercicio nº 1.- Calcula m para que los puntos $R(5,-2)$, $S(-1,1)$ y $T(2,m)$ estén alineados.

1 punto

Ejercicio nº 2.- Halla las ecuaciones de la recta r que pasa por los puntos $A(-3,4)$ y $B(5,-1)$ en todas sus formas: continua, punto-pendiente, explícita y general. Comprueba si el punto $C(-1,3)$ pertenece a la recta.

1,5 puntos

Ejercicio nº 3.- Halla las ecuaciones de las siguientes rectas:

a) Recta r_1 que es paralela a $s: 2x + y - 7 = 0$ y pasa por el punto $P(9,-5/2)$.

b) Recta r_2 que es perpendicular a $t: 8x - 3y + 6 = 0$ y pasa por el punto $Q(-3,2)$.

1,5 puntos

Ejercicio nº 4.- En el triángulo de vértices $A(-3,1)$, $B(1,5)$ y $C(4,0)$, hallar:

a) La ecuación de la recta h sobre la que se apoya la altura trazada desde el vértice B.

b) La ecuación de la mediatriz m del lado AB.

2 puntos

Ejercicio nº 5.- a) Halla la ecuación de la circunferencia de diámetro PQ, siendo $P(-5,2)$ y $Q(3,-6)$.

b) Calcula k para que el punto $(-3, k)$ pertenezca a la circunferencia de ecuación

$$c \equiv (x-1)^2 + (y+2)^2 = 25$$

2 puntos

Ejercicio nº 6.- Dada la recta de ecuación $r \equiv 2x - y + 1 = 0$ y el punto $A(6,-2)$, calcula:

a) La ecuación de la recta s que pasa por el punto $A(6,-2)$ y es paralela a r.

b) La ecuación de la recta t que pasa por el punto $A(6,-2)$ y es perpendicular a r.

c) El punto M de intersección entre r y t.

d) El punto simétrico de A respecto de M.

2 puntos

SOLUCIONES

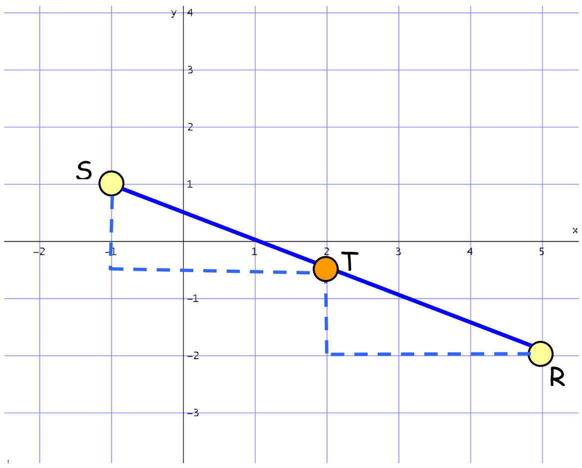
E.1. Calcula m para que los puntos $R(5,-2)$, $S(-1,1)$ y $T(2,m)$ estén alineados.

Cuando los tres puntos están alineados, los triángulos son semejantes y se cumple:

$$\frac{1-m}{m-(-2)}=\frac{2-(-1)}{5-2}\Rightarrow\frac{1-m}{m+2}=\frac{3}{3}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow m+2=1-m\Rightarrow 2m=-1\Rightarrow \boxed{m=-\frac{1}{2}}$$

También podríamos haber utilizado el triángulo de vértices S, R y $P(-1,-2)$, pues también es semejante a los de la figura.



E.2. Halla las ecuaciones de la recta r que pasa por los puntos $A(-3,4)$ y $B(5,-1)$ en todas sus formas: continua, punto-pendiente, explícita y general. Comprueba si el punto $C(-1,3)$ pertenece a la recta.

Comenzamos calculando la ecuación de la recta en forma continua:

$$r\equiv\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}\Rightarrow r\equiv\frac{x-(-3)}{5-(-3)}=\frac{y-4}{-1-4}\Rightarrow \boxed{r\equiv\frac{x+3}{8}=\frac{y-4}{-5}}\rightarrow \underline{\textit{Ecuación continua}}$$

Ahora calculamos la pendiente de la recta y su ecuación en forma de punto-pendiente:

$$m=\frac{-1-4}{5-(-3)}=-\frac{5}{8}\Rightarrow \boxed{r\equiv y-4=-\frac{5}{8}\cdot(x+3)}\rightarrow \underline{\textit{Ecuación en forma de punto-pendiente}}$$

Despejando y obtenemos la ecuación explícita:

$$r\equiv y-4=-\frac{5}{8}\cdot(x+3)\Rightarrow r\equiv y=-\frac{5}{8}\cdot x-\frac{15}{8}+4\Rightarrow \boxed{r\equiv y=-\frac{5}{8}\cdot x+\frac{17}{8}}\rightarrow \underline{\textit{Ecuación explícita}}$$

Multiplicando por 8, y colocando los términos, obtenemos la ecuación general de la recta:

$$r\equiv 8y=-5x+17\Rightarrow \boxed{r\equiv 5x+8y-17=0}\rightarrow \underline{\textit{Ecuación general}}$$

Nos queda comprobar si el punto $C(-1,3)$ pertenece a la recta r. Para ello sustituimos sus coordenadas, por ejemplo, en la ecuación general:

$$5\cdot(-1)+8\cdot 3-17=-5+24-17=2\neq 0\Rightarrow \boxed{C(-1,3)\notin r}.$$

E.3. Halla las ecuaciones de las siguientes rectas:

a) Recta r_1 que es paralela a $s: 2x+y-7=0$ y pasa por el punto $P(9,-5/2)$.

b) Recta r_2 que es perpendicular a $t: 8x-3y+6=0$ y pasa por el punto $Q(-3,2)$.

---

a) $r_1 \parallel s\Rightarrow r_1\equiv 2x+y+c=0$; $P(9,-5/2)\in r_1\Rightarrow 2\cdot 9-\frac{5}{2}+c=0\Rightarrow\frac{31}{2}+c=0\Rightarrow c=-\frac{31}{2}\Rightarrow$

$$\Rightarrow r_1 \equiv 2x + y - \frac{31}{2} = 0$$

b) $r_2 \perp t \Rightarrow r_2 \equiv 3x + 8y + c = 0$; $Q(-3,2) \in r_2 \Rightarrow 3 \cdot (-3) + 8 \cdot 2 + c = 0 \Rightarrow 7 + c = 0 \Rightarrow c = -7 \Rightarrow$

$$\Rightarrow r_2 \equiv 3x + 8y - 7 = 0$$

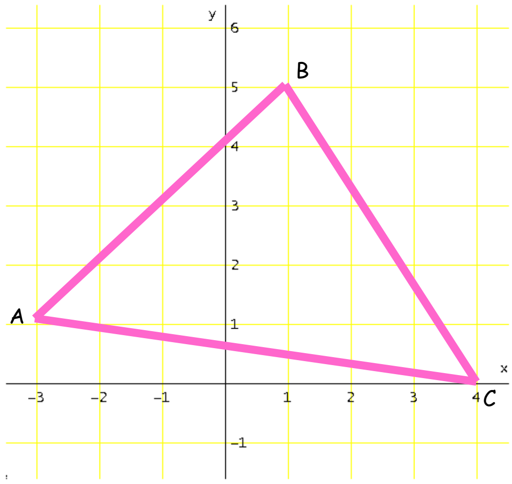
E.4. En el triángulo de vértices $A(-3,1)$, $B(1,5)$ y $C(4,0)$, hallar:

a) La ecuación de la recta h sobre la que se apoya la altura trazada desde el vértice B.

b) La ecuación de la mediatriz m del lado AB.

---

a) Tenemos que calcular la ecuación de la recta h perpendicular al segmento AC, que pasa por el punto B. Pues bien, buscamos el camino más corto: calcular la pendiente del segmento AC.



$$m_{AC} = \frac{0-1}{4-(-3)} = -\frac{1}{7}$$

Como

$$h \perp AC \Rightarrow m_h \cdot m_{AC} = -1 \Rightarrow m_h \cdot \left(-\frac{1}{7}\right) = -1 \Rightarrow m_h = 7$$

Ya tenemos la pendiente de la recta, m_h, y un punto B por donde pasa. La gente hábil y comodona expresaría la solución en forma de punto pendiente:

$$h \equiv y - 5 = 7 \cdot (x-1)$$

b) Ahora tenemos que encontrar la ecuación de la mediatriz, que es una recta z perpendicular al segmento AB y, además, pasa por su punto medio. Pues, después del apartado anterior, esto no debe ser difícil:

- Calculamos la pendiente del segmento AB:

$$m_{AB} = \frac{5-1}{1-(-3)} = \frac{4}{4} = 1$$

- Como $z \perp AB \Rightarrow m_z \cdot m_{AB} = -1 \Rightarrow m_z \cdot 1 = -1 \Rightarrow m_z = -1$
- La mediatriz pasa por el punto medio del segmento AB. Pues a calcularlo:

$$PM_{AB} = \left(\frac{-3+1}{2}, \frac{1+5}{2}\right) = (-1,3)$$

Ya están todos los "ingredientes", así que podemos concluir que la mediatriz tiene por ecuación

$$z \equiv y - 3 = -1 \cdot (x+1) \text{ ó } z \equiv y = -x + 2 \text{ ó } z \equiv x + y - 2 = 0$$

E.5. a) Halla la ecuación de la circunferencia de diámetro PQ, siendo $P(-5,2)$ y $Q(3,-6)$.
b) Calcula k para que el punto $(-3, k)$ pertenezca a la circunferencia de ecuación

$$c \equiv (x-1)^2 + (y+2)^2 = 25$$

---

a) Necesitamos calcular las coordenadas del centro de la circunferencia y el radio. Sencillo:

- El centro de la circunferencia ha de ser el punto medio del segmento PQ.

$$C = PM_{PQ} = \left(\frac{-5+3}{2}, \frac{2+(-6)}{2} \right) = (-1,-2)$$

- El radio es la distancia del centro a P o a Q, como queramos.

$$r = dist(C,P) = \sqrt{(-5-(-1))^2 + (2-(-2))^2} = \sqrt{16+16} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

Pues ya lo tenemos, la ecuación de la circunferencia es:

$$c \equiv (x+1)^2 + (y+2)^2 = 32$$

b) $(-3,k) \in c \equiv (x-1)^2 + (y+2)^2 = 25 \Rightarrow (-3-1)^2 + (k+2)^2 = 25 \Rightarrow 16 + k^2 + 4k + 4 = 25 \Rightarrow$

$$\Rightarrow k^2 + 4k - 5 = 0 \Rightarrow k = \frac{-4 \pm \sqrt{16+20}}{2} = \frac{-4 \pm 6}{2} = \begin{cases} 1 \\ -5 \end{cases}$$

E.6. Dada la recta de ecuación $r \equiv 2x - y + 1 = 0$ y el punto $A(6,-2)$, calcula:

a) La ecuación de la recta s que pasa por el punto $A(6,-2)$ y es paralela a r.

b) La ecuación de la recta t que pasa por el punto $A(6,-2)$ y es perpendicular a r.

c) El punto M de intersección entre r y t.

d) El punto simétrico de A respecto de M.

---

a) Como son rectas paralelas, mantenemos los mismos coeficientes de x e y, ya sólo falta averiguar el término independiente c:

$$s \parallel r \Rightarrow s \equiv 2x - y + c = 0;\ A(6,-2) \in s \equiv 2x - y + c = 0 \Rightarrow 2 \cdot 6 - (-2) + c = 0 \Rightarrow c = -14 \Rightarrow$$

$$s \equiv 2x - y - 14 = 0$$

b) Al ser rectas perpendiculares, los coeficientes de x e y "van cruzados y, uno de ellos, cambiado de signo"; y, de nuevo, sólo queda calcular el término independiente:

$$t \perp r \Rightarrow t \equiv x + 2y + c = 0;\ A(6,-2) \in t \equiv x + 2y + c = 0 \Rightarrow 6 + 2 \cdot (-2) + c = 0 \Rightarrow c = -2 \Rightarrow$$

$$t \equiv x + 2y - 2 = 0$$

c) El punto de corte entre las rectas r y t lo conseguimos resolviendo el sistema formado por sus ecuaciones:

$$\begin{cases} 2x - y + 1 = 0 \\ x + 2y - 2 = 0^{(1)} \end{cases} \overset{2E_1+E_2}{\Rightarrow} 5x = 0 \Rightarrow x = 0 \overset{(1)}{\Rightarrow} 2y - 2 = 0 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow M(0,1)$$

d) Si $A'(x,y)$ es el punto simétrico de $A(6,-2)$ respecto de $M(0,1)$, entonces M es el punto medio del segmento AA', y por lo tanto, se cumple:

$$\left. \begin{array}{l} \dfrac{x+6}{2} = 0 \Rightarrow x = -6 \\ \\ \dfrac{y+(-2)}{2} = 1 \Rightarrow y = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow A'(-6,4)$$